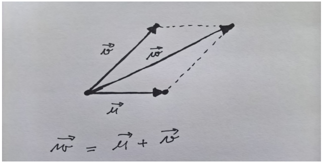
Lesk a bída teorie reprezentací

Jan Trlifaj

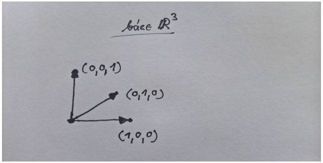
I. Lineární reprezentace

Lineární (= vektorové) prostory

Tvořeny vektory, sčítání vektorů, násobení skaláry



Báze vektorového prostoru, dimenze = počet prvků (libovolné) báze.



Lineární transformace a matice

Lineární transformace vektorového prostoru $V =$
zobrazení kompatibilní se sčítaním vektorů a násobením skaláry.

Každá lineární transformace je jednoznačně určena hodnotami na bázi prostoru V.

Aritmetizace vzhledem k bázi:

$$\text{vektory} \longleftrightarrow n\text{-tice skalárů}$$

$$\text{lineární transformace} \leftrightarrow \text{matice (jejichž koeficienty jsou skaláry)}$$

.

Symetrie a grupy

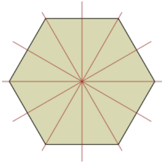
Symetrie matematických objektů jsou popisovány **grupami**.

- symetrie $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. permutace na N. Zápis: $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right)$

  Symetrická grupa S_n je tvořena všemi permutacemi na N, s operací skládání permutací.

- **Kleinova** 4-**grupa** K_4 - symetrie obdélníka, který není čtvercem.

- **dihedrálni grupa** D_{2n} - symetrie pravidelného n-úhelníka.



- ...

II. Lineární reprezentace grup, grafů, a algeber

Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917)

Lineární reprezentace grup

Idea

Symetrie se interpretují jako lineární transformace vektorových prostorů.

Příklad

Reprezentace symetrické grupy S_n lineárními transformacemi prostoru V dimenze n (s bází $B = \{b_1, \dots, b_n\}$):

Permutace $\pi \in S_n$ se interpretuje jako lineární transformace permutující prvky v B: $b_i \mapsto b_{\pi(i)}$.

Každou n-prvkovou grupu G lze vnořit do symetrické grupy S_n, složení s reprezentací uvedenou výše dává tzv. **regulární reprezentaci** G.

Grafy

Graf G

- konečná množina vrcholů,
- (obecně nekonečná) množina orientovaných hran.
  Hrany mohou být násobné, a mohou vytvářet cykly.

Příklady

1. $\mathbb{A}_m = \bullet \longrightarrow \bullet \dots \qquad \dots \bullet \longrightarrow \bullet$
2. Kroneckerův graf: $\mathbb{K}_m = \bullet \overset{m\times}{\rightrightarrows} \bullet$
3. $\mathbb{L}_m =$ $$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop below, "m\times"] \end{tikzcd}$$

Lineární reprezentace grafů

Idea

Vrcholy se interpretují jako vektorové prostory a orientované hrany jako lineární transformace.

Příklady reprezentací

1. pro $\mathbb{A}_2$: $K \xrightarrow{id} K$, $K \xrightarrow{0} 0$, $0 \xrightarrow{0} K$.

2. pro $\mathbb{K}_2$:
$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "J_{n,k}"'] & K^n \end{tikzcd} .$$

Společné zobecnění: Lineární reprezentace algeber

Lineární transformace vektorového prostoru V tvoří vektorový prostor, a dají se násobit (skládat), tvoří **K-algebru $L(V)$**.

Aritmetizace: $L(V) \cong M_n(K)$ K-algebra $n \times n$ matic nad K.

Idea

Zkoumat reprezentace libovolné K-algebry A v K-algebře $L(V)$.

Reprezentace symetrií (grup) a grafů jsou jen speciálním případem:

1. reprezentace grupy G = reprezentace **grupové algebry KG** (grupa G tvoří bázi prostoru KG, násobení = grupová operace).
2. reprezentace grafu G = reprezentace **algebry cest grafu $\langle KG \rangle$** (cesty v grafu tvoří bázi prostoru $\langle KG \rangle$, násobení = navazování cest).

Příklady K-algeber cest grafů

Algebra cest grafu $\mathbb{A}_m$ je algebra horních trojúhelníkových matic $\mathrm{UT}_m(K) = \left(\begin{smallmatrix} K & \dots & K \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & K \end{smallmatrix}\right)$.

Algebra cest Kroneckerova grafu $\mathbb{K}_m$ je maticová algebra $\left(\begin{smallmatrix} K & K^m \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right)$.

Algebra cest grafu $\mathbb{L}_m$ je polynomiální algebra $K\langle x_1, \dots, x_m \rangle$.

III. Démokritovský přístup k reprezentacím

Démokritos (460 - 370 př.n.l.)

Dekompozice reprezentací

Idea

Rozložit reprezentace na "atomy" (= nerozložitelné reprezentace).

Pro konečně dimenzionální reprezentace je to vždy možné!

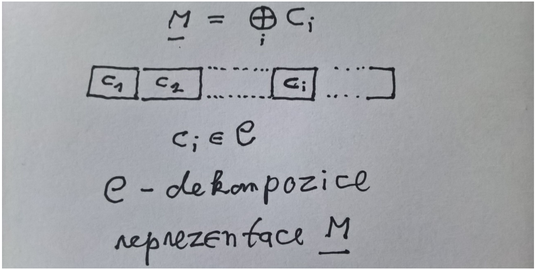
Příklad

Rozklad reprezentací grafu $\mathbb{A}_2 = \bullet \longrightarrow \bullet$

$$V \xrightarrow{f} W = (\mathrm{Ker}\ (\mathrm{f}) \to 0) \oplus (C \to \mathrm{Im}(f)) \oplus (0 \to D)$$

- první sčítanec je součtem kopií nerozložitelné reprezentace $K \to 0$,
- druhý je součtem kopií $K \xrightarrow{id} K$,
- a třetí kopií $0 \to K$.

Dekompozice reprezentací v obecném případě



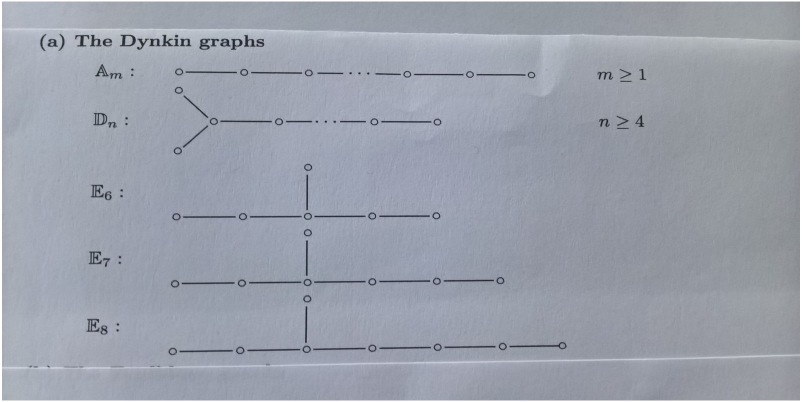
Důležitý speciální případ:

$\mathcal{C} =$ všechny konečně dimenzionální nerozložitelné reprezentace.

Konečný reprezentační typ

Algebra A je **konečného reprezentačního typu** pokud existuje konečně mnoho nerozložitelných reprezentací algebry A. Pak se každá reprezentace algebry A jednoznačně rozkládá na nerozložitelné reprezentace.

[Gabriel] Pro $K = \mathbb{C}$ je algebra cest grafu G konečného reprezentačního typu, právě když neorientovaný graf $\bar{G}$ je Dynkinuv.

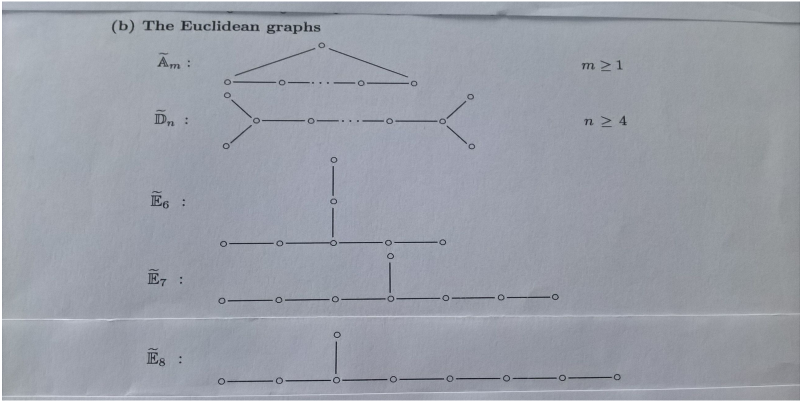


Krotký reprezentační typ

Algebra A je **krotkého reprezentačního typu** pokud existuje klasifikace konečně-dimenzionálních nerozložitelných reprezentací algebry A, ale těchto reprezentací je nekonečně.

- **[Kronecker] Pro $K = \mathbb{C}$ je algebra cest grafu $\mathbb{K}_2$ krotkého reprezentačního typu.**
- **[Nazarova, Donovan-Freislich] Pro $K = \mathbb{C}$ je algebra cest grafu G krotkého reprezentačního typu, právě když neorientovaný graf $\bar{G}$ je Eukleidův.**

Eukleidovské grafy



n-Subspace Problem

Problém je konečného typu pro $n < 4$, krotkého typu pro $n = 4$ a divokého typu pro $n > 4$.

Divoký reprezentační typ

Algebra A, která není konečného ani krotkého reprezentačního typu, se nazývá **divokého reprezentačního typu**.

Příklad

Pro $m \geq 3$ je algebra cest Kroneckerova grafu $\mathbb{K}_m$ divokého typu.

[Drozd,Crawley-Boevey]

Je-li A algebra divokého reprezentačního typu, pak pro **libovolnou** konečně dimenzionální K-algebru B platí, že **všechny** K-lineární reprezentace algebry B lze realizovat jako K-lineární reprezentace algebry A.

Důsledek: **Algebry cest skoro všech grafů jsou divoké, a tedy není šance na klasifikaci jejich konečně dimenzionálních nerozložitelných reprezentací.**

Klasifikace lineárních reprezentací grup

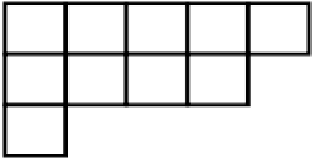
G konečná grupa o n prvcích, K pole skalárů charakteristiky p.

- Grupová algebra KG je **konečného reprezentačního typu** pokud buď
  - p nedělí n, pak dokonce **každá reprezentace má jednoznačnou dekompozici na jednoduché reprezentace,**
  - nebo všechny maximální p-podgrupy G jsou cyklické.
- KG je **krotkého reprezentačního typu** pokud $p = 2$ a všechny maximální p-podgrupy G jsou izomorfní Kleinově grupě K_4, nebo dihedrální grupě $D_{2^{n+2}}$, nebo semidihedrální grupě $SD_{2^{n+1}}$, nebo zobecněné kvaternionové grupě Q_{4n}.
- **Ve všech ostatních případech má KG divoký reprezentační typ!**

Příklad: reprezentace symetrické grupy S_n pro $K = \mathbb{C}$

Youngovy diagramy

Příklad pro $n = 10$ a rozklad $10 = 5 + 4 + 1$.



1	2	4	7	8
3	5	6	9	
10				

G - řádková podgrupa diagramu (o r prvcích),
H - sloupcová podgrupa (s prvků).

Youngovy projektory a Spechtovy reprezentace:
$p = r^{-1} \sum_{g \in G} g, \quad q = s^{-1} \sum_{g \in H} \mathrm{sgn}(g) g, \quad S(Y) = \mathbb{C} S_n pq.$

Spechtova reprezentace $S(Y)$ je jednoduchá.
Naopak: každá jednoduchá reprezentace je Spechtova pro nějaký (jednoznačně určený) Youngův diagram Y.

Krystalografické grupy

K popisu symetrií krystalografických konfigurací v $\mathbb{R}^n$
(tzv. **prostorových grup**) nestačí „horizontální" dekompozice.
Je třeba přidat „vertikální" rozměr - rozšíření:

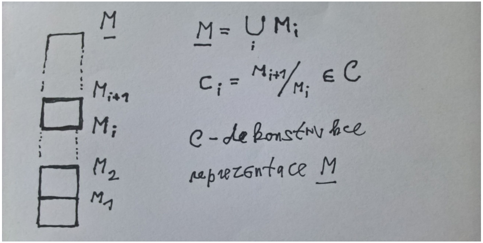
Bieberbach, Zassenhaus - Hilbertův 18. problém

Prostorové grupy splývají s grupami G, které jsou rozšířeními (mřížové) grupy $\mathbb{Z}^n$ pomocí konečných (bodových) grup B:

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to G \to B \to 0.$$

IV. Derridovský přístup k reprezentacím

Dekonstrukce reprezentací



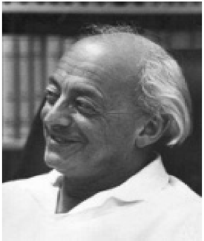
Jacques Derrida (1930 - 2004) Paul Eklof

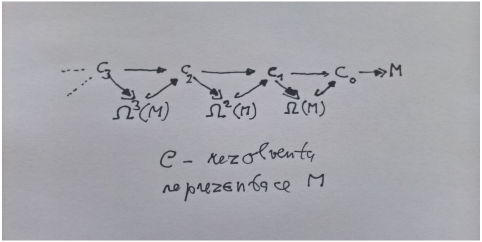
Rozšíření reprezentací, iterovaná rozšíření, transfinitní rozšíření.

Třída reprezentací $\mathcal{A}$ je **dekonstruovatelná** pokud existuje podmnožina $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ taková, že každá reprezentace $A \in \mathcal{A}$ je transfinitním rozšířením reprezentací z $\mathcal{C}$ (tj., pro A existuje $\mathcal{C}$-dekonstrukce).

Např. třída všech podgrup $\mathbb{Q}$-vektorových prostorů je dekonstruovatelná.

Aproximace





Reinhold Baer

Hyman Bass

Idea

- charakterizace reprezentací v konkrétní třídě $\mathcal{C}$ pomocí invariantů,
- (levé, pravé) aproximace obecných reprezentací reprezentacemi z $\mathcal{C}$,
- iterace aproximací: $\mathcal{C}$-rezolventy, soubory invariantů.

Např. třída všech injektivních reprezentací $\mathcal{C}$ dává Bassovy invarianty.

Hojnost aproximací

- Každá dekonstruovatelná třída davá (pravé) aproximace.
- Třída Ext-ortogonální k libovolné množině reprezentací dává (levé) aproximace.

Vhodná volba aproximací umožňuje řešit některé klasické problémy algebry:

- **Finitistic Dimension Conjecture pro Gorensteinovy algebry,**
- **Flat Cover Conjecture,**
- **klasifikace tříd konečně dimenzionálních reprezentací pomocí nekonečně dimenzionálních,**
- **dekompozice nekonečně dimenzionálních reprezentací.**

Základní otázka: Jsou všechny třídy reprezentací uzavřené na transfinitní extenze dekonstruovatelné, a tudíž použitelné k aproximacím?

Podnět z algebraické geometrie

Vladimir Drinfeld

[Drinfeld] "Infinite–dimensional vector bundles in algebraic geometry: an introduction", The Unity of Mathematics, Birkhäuser, 2006.

Idea

Nahradit volné reprezentace plochými Mittag-Lefflerovými.

Otázka: Lze je užít pro výpočet kohomologií kvazi-koherentních svazků?

Cesta od algebraické geometrie zpět k reprezentacím

Modelové struktury

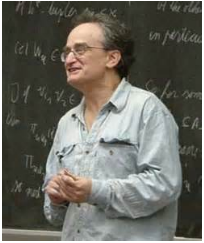
[Quillen] "Homotopical Algebra", Springer 1967.

Kotorzní páry

[Hovey] "Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory", Math. Z. 241(2002).

Fakt: ploché Mittag-Lefflerovy = lokálně volné (reprezentace).

Lokální volné reprezentace



Saharon Shelah

Lokálně volné reprezentace studovány již od 60. let (Shelah aj.):

[Eklof-Mekler] "Almost Free Modules", North-Holland, 2000.

Konsistence neexistence Whiteheadových aproximací:

[Eklof-Shelah] "On the existence of precovers", Illinois J. Math. 47(2003).

Meze teorie aproximací

Negativní odpověď na základní otázku:

Pro libovolnou neperfektní algebru **třída lokálně volných reprezentací není (zprava) aproximující, a tedy ani dekonstruovatelná**.

Příklad: Aditivní grupa racionálních čísel $\mathbb{Q}$ nemá žádnou lokálně volnou (pravou) aproximaci.

Začátek nového příběhu:

- Zobecnění lokální volnosti pomocí tzv. vychylující teorie dává například
  neexistenci "lokálně volných" (pravých) aproximací pro libovolné algebry cest, které nejsou konečného reprezentačního typu.
- Vyvinuté metody lze užít i k hlubšímu studiu faktorizačních vlastností reprezentací (řešení Auslanderova problému aj.).

Příspěvek pražské školy

- [Herbera-Trlifaj] "Almost free modules and Mittag-Leffler conditions", Adv. Math. 229(2012), 3436-3467.
- [Estrada-Guil-Prest-Trlifaj] "Model category structures arising from Drinfeld vector bundles", Adv. Math. 231(2012), 1417-1438.
- [Šťovíček] "Exact model categories, approximation theory, and cohomology of quasi-coherent sheaves", in Advances in Representation Theory of Algebras, 297-367, ETH Zurich 2013.
- [Šaroch] "Approximations and Mittag-Leffler conditions – the tools", vyjde v Israel J. Math.
- [Angeleri-Šaroch-Trlifaj] "Approximations and Mittag-Leffler conditions – the applications", vyjde v Israel J. Math.
- [Šaroch] "On the non-existence of right almost split maps", Invent. Math. 209(2017), 463-479.