

Interakce tekutin a struktur *

Miloslav Feistauer
Univerzita Karlova v Praze,
Matematicko-fyzikální fakulta

ve spolupráci s Petrem Sváčkem, FSI ČVUT a Jaromírem
Horáčkem, ÚT AV ČR

*Učená společnost ČR, 15. 1. 2008

Význam simulace interakce tekutin a struktur:

- vývoj letadel (vibrace křídel)
- vývoj turbin (vibrace lopatek)
- automobilový průmysl (odstranění hluku)
- stavební inženýrství (interakce silného větru a stavebních konstrukcí - TV věže, chladicí věže, mosty,...)
- medicína (hemodynamika - proudění krve v srdci a cévách, vznik hlasu - proudění vzduchu v hlasivkách)

Příklady:

Vibrace mostu způsobené větrem

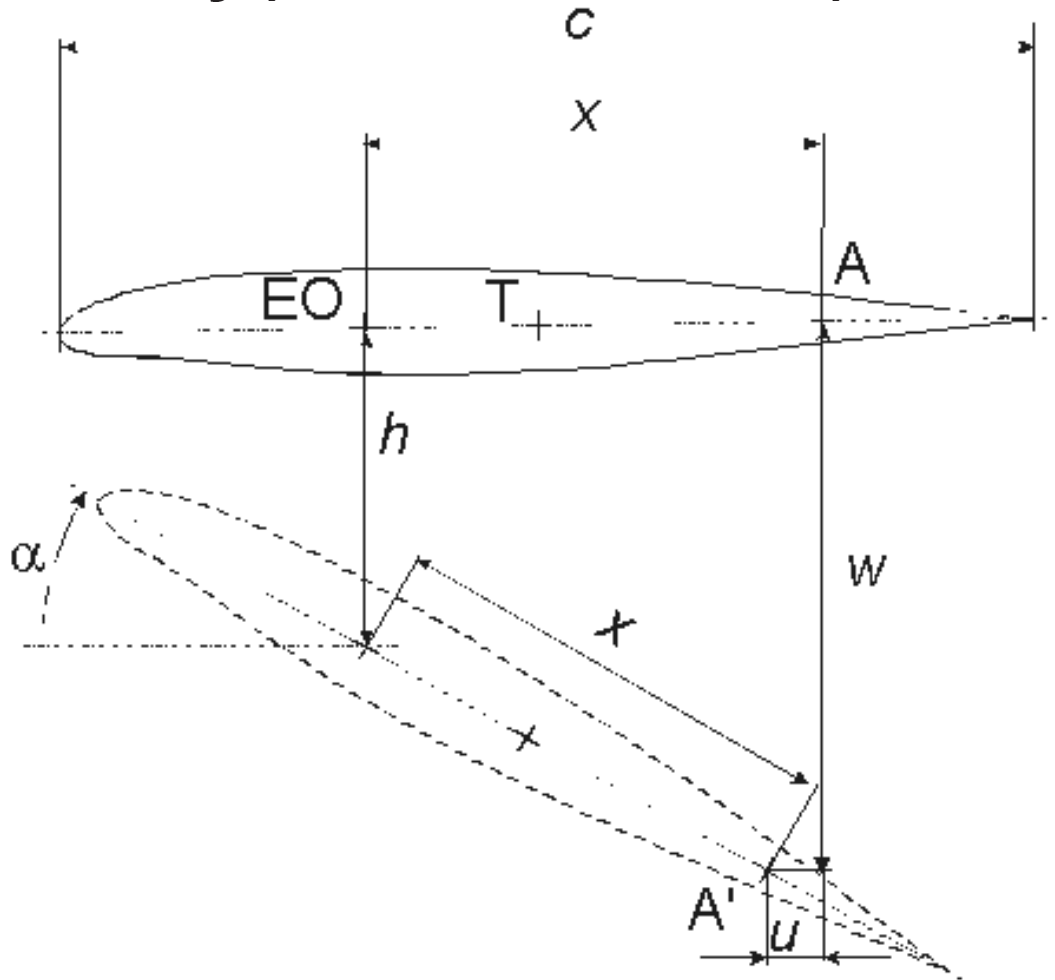
**Experimenty s modely letadel v aerodynamickém tunelu –
ukazují nebezpečné letové režimy**



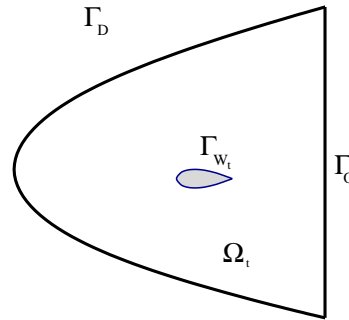
Měření vibrací křídla v aerodynamickém tunelu VZLÚ v Letňanech

Náš cíl: simulace vibrací křídla vynucených obtékajícím vzduchem – umožňující částečné nahrazení zdlouhavých a nákladných experimentů v aerodynamických tunelech ($\approx 10^5 - 10^7$ Kč)

Modelování interakce křídla letadla s proudícím vzduchem:
pomocí **obtěkání leteckého profilu** = rovinný řez křídlem
Letecký profil se dvěma stupni volnosti: .



Formulace problému proudění v časově závislé oblasti



$(0, T)$, kde $T > 0$ – časový interval

$\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$ – výpočetní oblast vyplněná tekutinou v čase t

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)), p = p(x, t), x = (x_1, x_2) \in \Omega_t, t \in (0, T)$

– rychlost a kinematický tlak

$\nu > 0$ – kinematická vazkost

Rovnice popisující proudění:

Navierovy-Stokesovy rovnice, rovnice kontinuity

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ &\text{in } \Omega_t. \end{aligned}$$

Pro každé t je oblast Ω_t jiná.

Simulace proudění v časově proměnné oblasti: metoda ALE - Arbitrary Lagrangian-Eulerian method (T. Hughes et al)

Ω_{ref} – referenční konfigurace např. $\Omega_{\text{ref}} = \Omega_0$.

\mathcal{A}_t – **ALE zobrazení** – prosté regulární zobrazení referenční konfigurace na výpočtovou oblast Ω_t v čase t :

$$\mathcal{A}_t : \Omega_{\text{ref}} \rightarrow \Omega_t, \quad X \in \Omega_{\text{ref}} \mapsto x = x(X, t) = \mathcal{A}_t(X) \in \Omega_t. \quad (1)$$

Rychlost deformace oblasti (domain velocity)

$$\tilde{w}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(X, t), \quad (2)$$

může být přetransformována do prostorových souřadnic x vztahem

$$w = \tilde{w} \circ \mathcal{A}_t^{-1}, \quad \text{tj.} \quad w(x, t) = \tilde{w}(\mathcal{A}_t^{-1}(x), t) \quad (3)$$

ALE derivace $\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt}$, analogie k *materiálové derivaci* v Lagrangeovském popisu.

Pro funkci $f : \mathcal{M} = \{(x, t); x \in \Omega_t, t \in (0, T)\} \rightarrow \mathbb{R}$ položíme

$$\tilde{f}(X, t) = f(\mathcal{A}_t(X), t)$$

a definujeme

$$\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} f(x, t) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(X, t), \quad X = \mathcal{A}_t^{-1}(x) \quad (4)$$

Zjistíme, že

$$\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} f = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) f. \quad (5)$$

Formulace Navierových-Stokesových rovnic v ALE tvaru

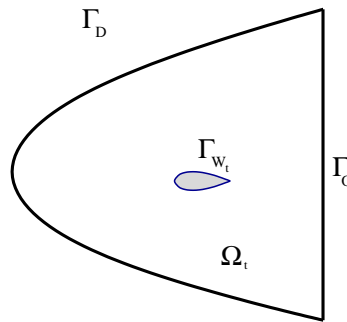
$$\begin{aligned} \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \mathbf{u} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ &\text{in } \Omega_t. \end{aligned} \quad (6)$$

Počáteční podmínka:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, \quad x \in \Omega_0, \quad (7)$$

Okrajové podmínky:

$\partial\Omega_t = \Gamma_D \cup \Gamma_O \cup \Gamma_{Wt}$: Γ_D, Γ_O and Γ_{Wt} disjunktní



Γ_D představuje vstup a případně neprostupné stěny – zadáváme Dirichletovu podmínku

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_D. \quad (8)$$

Γ_{Wt} – profil v čase t – předpokládáme, že rychlost tekutiny \mathbf{u} je rovna rychlosti $\mathbf{w}|_{\Gamma_{Wt}}$ profilu:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{Wt}} = \mathbf{w}|_{\Gamma_{Wt}}. \quad (9)$$

Γ_O – výstup – ”jemná přirozená” podmínka

$$-(p - p_{ref})\mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_O, \quad (10)$$

\mathbf{n} – jednotková vnější normála k $\partial\Omega_t$

p_{ref} – předepsaný referenční tlak na výstupu

Existence a jednoznačnost řešení: OTEVŘENÝ problém

Teorie Navierových-Stokesových rovnic:

Existence řešení je matematicky dokázána pro proudění v pevné oblasti.

Jednoznačnost řešení = fundamentální otevřený problém -
jeden z matematických problémů pro třetí tisíciletí - cena
Clayova Institutu - 10^6 USD

Numerické řešení problému

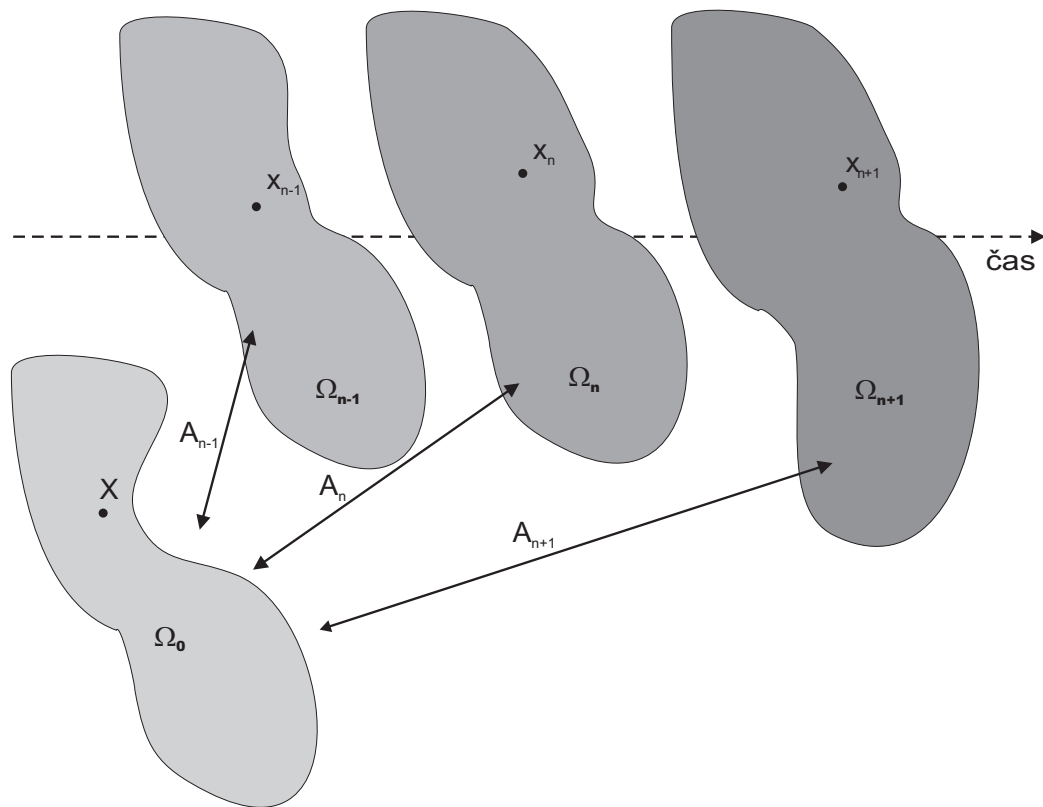
Obtíže:

- nelineární problém
- pohybující se profil
- vysoké Reynoldsovo číslo
- interakce s modelem deformace křídla

Časová diskretizace

Dělení časového intervalu $[0, T]$: $0 = t_0 < t_1 < \dots < T$, $t_k = k\tau$,
s časovým krokem $\tau > 0$

$u(x, t_n), p(x, t_n)$ – přesné řešení (definované pro $x \in \Omega_{t_n}$) v
časovém okamžiku t_n – aproximováno funkcemi $u^n(x), p^n(x)$
(definovanými v Ω_{t_n}).



Obr. 2: Časová
diskretizace v pohybující se oblasti

Pro $X \in \Omega_{\text{ref}}$ máme

$$x^i = \mathcal{A}_{t_i}(X) \in \Omega_{t_i}, \quad , i = \dots, n - 1, n, n + 1. \quad (11)$$

Aproximaci ALE derivace v čase t_{n+1} a bodě $x^{n+1} = \mathcal{A}_{t_{n+1}}(X)$ vyjádříme pomocí **zpětné diference**:

$$\tilde{u}(X, t) = u(\mathcal{A}_t(X), t)$$

$$\frac{D^{\mathcal{A}}u}{Dt}(x^{n+1}, t_{n+1}) = \frac{\partial \tilde{u}(X, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_{n+1}} \quad (12)$$

$$\approx \frac{\tilde{u}^{n+1}(X) - \tilde{u}^n(X)}{\tau} \quad (13)$$

$$= \frac{u^{n+1}(x^{n+1}) - u^n(x^n)}{\tau}.$$

→ **Problém** pro neznámé funkce $\mathbf{u}^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $p^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}^{n+1}(x^{n+1}) - \mathbf{u}^n(x^n)}{\tau} \\ & + ((\mathbf{u}^{n+1}(x^{n+1}) - \mathbf{w}^{n+1}(x^{n+1})) \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}(x^{n+1}) \\ & - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1}(x^{n+1}) + \nabla p^{n+1}(x^{n+1}) = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}(x^{n+1}) = 0,$$

kde $\mathbf{w}^{n+1} \approx \mathbf{w}(t_{n+1})$.

K tomuto systému přidáme okrajové podmínky (8) – (10) na $\partial\Omega_{t_{n+1}}$.

Funkci \mathbf{u}^n , definovanou v Ω_{t_n} lze přetransformovat na funkci $\hat{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n \circ \mathcal{A}_{t_n} \circ \mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}$ definovanou v oblasti $\Omega_{t_{n+1}}$ a časově diskretizovaný problém (14) přetransformovat kompletně do oblasti $\Omega_{t_{n+1}}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^n}{\tau} \\ & + \left((\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0, \\ & \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ & \mathbf{v} \quad \Omega_{t_{n+1}}, \end{aligned} \tag{15}$$

& okrajové podmínky (8) – (10).

Prostorová diskretizace

Nejvhodnější metoda pro prostorovou diskretizaci předchozího problému pro výpočet funkcí $u := u^{n+1}$ a $p = p^{n+1}$ definovaných v oblasti $\Omega := \Omega_{t_{n+1}}$, splňujících systém (15) a okrajové podmínky (8) – (10): **metoda konečných prvků (MKP)**

Slabá formulace:

Prostor funkcí pro rychlost:

$$\mathcal{W} = (H^1(\Omega))^2 \text{ (Sobolevův prostor)}$$

Prostor testovacích funkcí pro rychlost:

$$\mathcal{X} = \{v \in \mathcal{W}; v|_{\Gamma_D \cup \Gamma_{Wt}} = 0\}$$

Prostor pro tlak:

$$\mathcal{M} = L^2(\Omega) \text{ (Lebesgueův prostor)}$$

Původní problém lze nyní přeformulovat jako úkol najít **slabé řešení**

$U = (\mathbf{u}, p) \in \mathcal{W} \times \mathcal{M}$:

$$a(U, U, V) = f(V), \quad \forall V = (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}, \quad (16)$$

& \mathbf{u} splňuje Dirichletovy okrajové podmínky (8), (9). Zde

$$\begin{aligned} & a(U^*, U, V) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \left((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \\ & - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q \, dx, \\ & f(V) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^n \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \\ & U = (\mathbf{u}, p), \quad V = (\mathbf{v}, q), \quad U^* = (\mathbf{u}^*, p). \end{aligned}$$

Dvojice $U = (\mathbf{u}, p)$ představuje řešení na časové úrovni t_{n+1} , tzn., že $\mathbf{u}^{n+1} := \mathbf{u}$ and $p^{n+1} := p$.

Galerkinova metoda konečných prvků:

Prostory $\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{M}$ jsou aproximovány konečněrozměrnými podprostory $\mathcal{W}_h, \mathcal{X}_h, \mathcal{M}_h$, $h \in (0, h_0)$, $h_0 > 0$

Diskrétní problém:

Najít $U_h = (u_h, p_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{M}_h$ tak, že u_h splňuje přibližně okrajové podmínky (8), (9) and

$$a(U_h, U_h, V_h) = f(V_h), \quad \forall V_h = (v_h, q_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h. \quad (18)$$



Prof. Ivo Babuška
Univ. of Texas at Austin



Prof. Franco Brezzi
Univ. of Pavia

Zajištění stability metody:

Babuškova–Brezziho (BB) podmínka, zvaná též **inf-sup podmínka**: Pro $(\mathcal{X}_h, \mathcal{M}_h)$ existuje konstanta $c > 0$ taková, že

$$\inf_{p_h \in \mathcal{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{X}_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq c, \quad h \in (0, h_0). \quad (19)$$

Ivo Babuska - Čestný člen Učené společnosti ČR
University of Texas at Austin, USA

HONORS AND AWARDS (some)

- Czechoslovak State Prize for Mathematics, 1968.
- Humboldt Senior US Scientist Award of the Federal Republic of Germany, 1976.
- Birkhoff Prize: American Mathematical Society and Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994
- Distinguished University Professor, University of Maryland, 1995.
- J. von Neumann Medal, U.S. Association for Computational Mechanics, 1995.
- Distinguished University Professor Emeritus, University of Maryland, 1996.
- Bolzano Medal, Czech Academy of Sciences, 1996.
- Fellow of the U.S. Association of Computational Mechanics, 1997.

Doctor of Sciences Honoris Causa:

- University of Westminster (UK), 1996
- Brunel University (UK), 1996.
- Charles University (Czech Republic), 1997.
- Czech Technical University (Czech Republic), 2007.



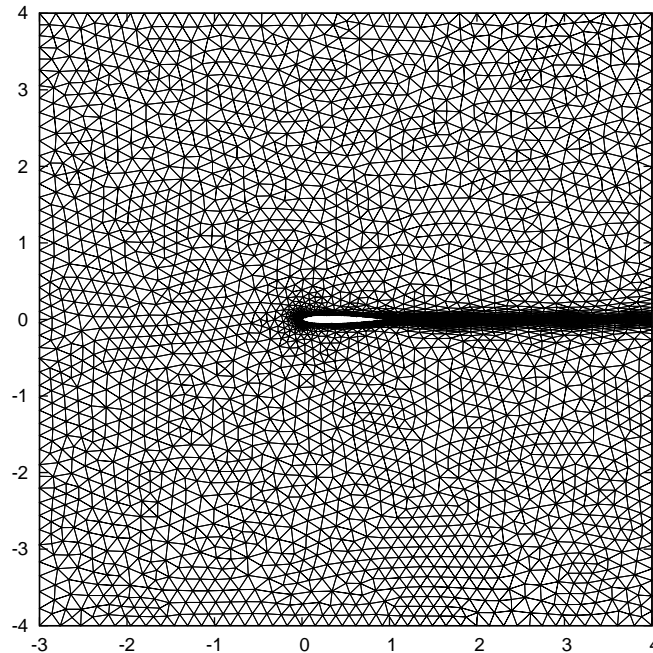
Udělení titulu Dr.h.c. prof. Babuškovi na ČVUT v r. 2007

Praktická realizace:

Ω je polygonální oblast

\mathcal{T}_h – triangulace oblasti $\Omega =$ síť tvořená konečným počtem trojúhelníků; $h =$ délka maximální strany

Příklad sítě:



Adaptovaná anisotropní síť (metoda [ANGENER](#) V. Dolejšího)

Taylorovy-Hoodovy elementy:

tlak - po částech lineární funkce,

rychlost - po částech kvadratická funkce:

Tato dvojice $(\mathcal{X}_h, \mathcal{M}_h)$ splňuje BB podmínku.

Stabilizace MKP

V prakticky důležitých problémech je $\nu \ll 1 \implies$ vysoká Reynoldsova čísla $Re = \frac{UL}{\nu} \approx 10^5 - 10^7$

\implies máme **singulárně pertubovaný problém s převažující konvekcí**

Standardní Galerkinova metoda (18) může vést k přibližnému řešení obsahujícímu tzv. "spurious oscillations" (nefyzikální oscilace, které nejsou obsaženy v přesném řešení = **Gibbsův jev**)

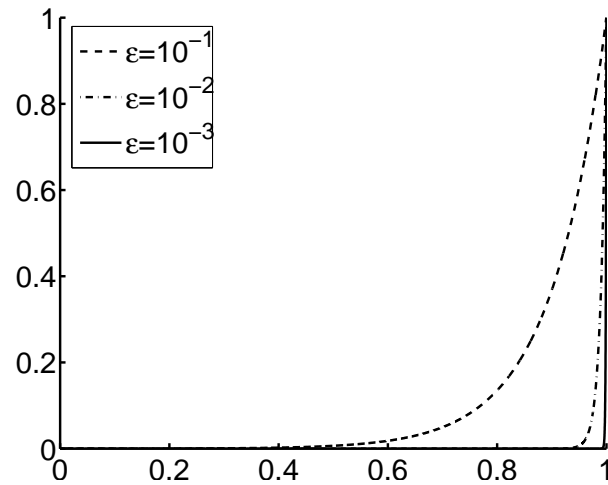
Jednoduchý příklad

$$-\varepsilon u'' + u' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \quad (20)$$

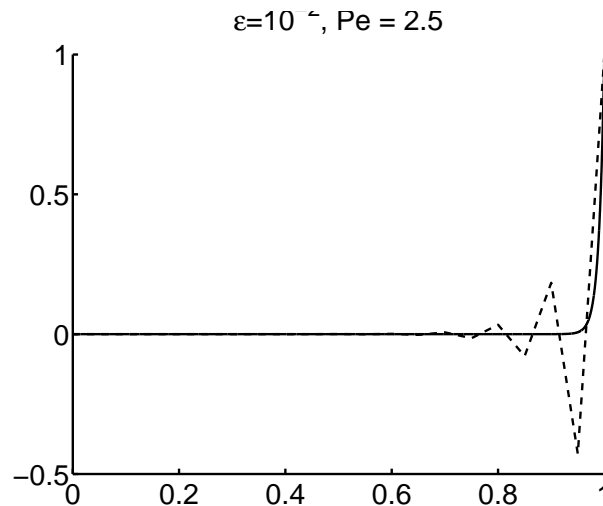
$$\varepsilon > 0$$

Přesné řešení:

$$u(x) = \frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}.$$



Přesné řešení pro $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$



Přibližné řešení $\varepsilon = 10^{-2}$

Nutno použít vhodnou stabilizaci – pro problém proudění: pomocí metody **proudnicové difuze (streamline-diffusion method** – T. Hughes et al.) kombinované se **stabilizací tlaku**



Prof. Tom Hughes, Univ. of Texas at Austin

Awards and honours (some)

Fellow of

- the **American Academy of Mechanics,**
- the **American Society of Mechanical Engineers (ASME),**
- the **U.S. Association for Computational Mechanics (USACM),**
- the **International Association for Computational Mechanics (IACM)** and the **American Association for the Advancement of Science.**

He has received

- the Walter L. Huber Civil Engineering Research Prize from ASCE,**
- the Melville Medal from ASME,**
- the Computational Mechanics Award from the Japan Society of Mechanical Engineers,**
- the von Neumann Medal from USACM,**
- the Gauss-Newton Medal from IACM,**
- the Worcester Reed Warner Medal from ASME.**

Zavedení stabilizačních členů $\mathcal{L}_h, \mathcal{F}_h, \mathcal{P}_h$ do diskrétního problému:

$\bar{w} = \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}$ – transportní rychlost

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_h(U^*, U, V) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\bar{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p \right) \cdot [(\bar{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}] dx, \\
 & \mathcal{F}_h(V) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \frac{1}{\tau} \hat{\mathbf{u}}^n \cdot [(\bar{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}] dx, \\
 & U = (\mathbf{u}, p), \quad V = (\mathbf{v}, q), \quad U^* = (\mathbf{u}^*, p),
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\mathcal{P}_h(U, V) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx, \quad U = (\mathbf{u}, p), \quad V = (\mathbf{v}, q),$$

$\delta_K \geq 0, \tau_K \geq 0$ – vhodné parametry

Stabilizovaný diskrétní problém:

Hledáme $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{M}_h$ takové, že

$$\begin{aligned} a(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{L}_h(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h, V_h) & \quad (22) \\ = f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h), \\ \forall V_h \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h \end{aligned}$$

a u_h splňuje přibližně Dirichletovy podmínky (8), (9).

Výběr stabilizačních parametrů:

Řada inženýrských přístupů - pro velká Re selhávají!!!

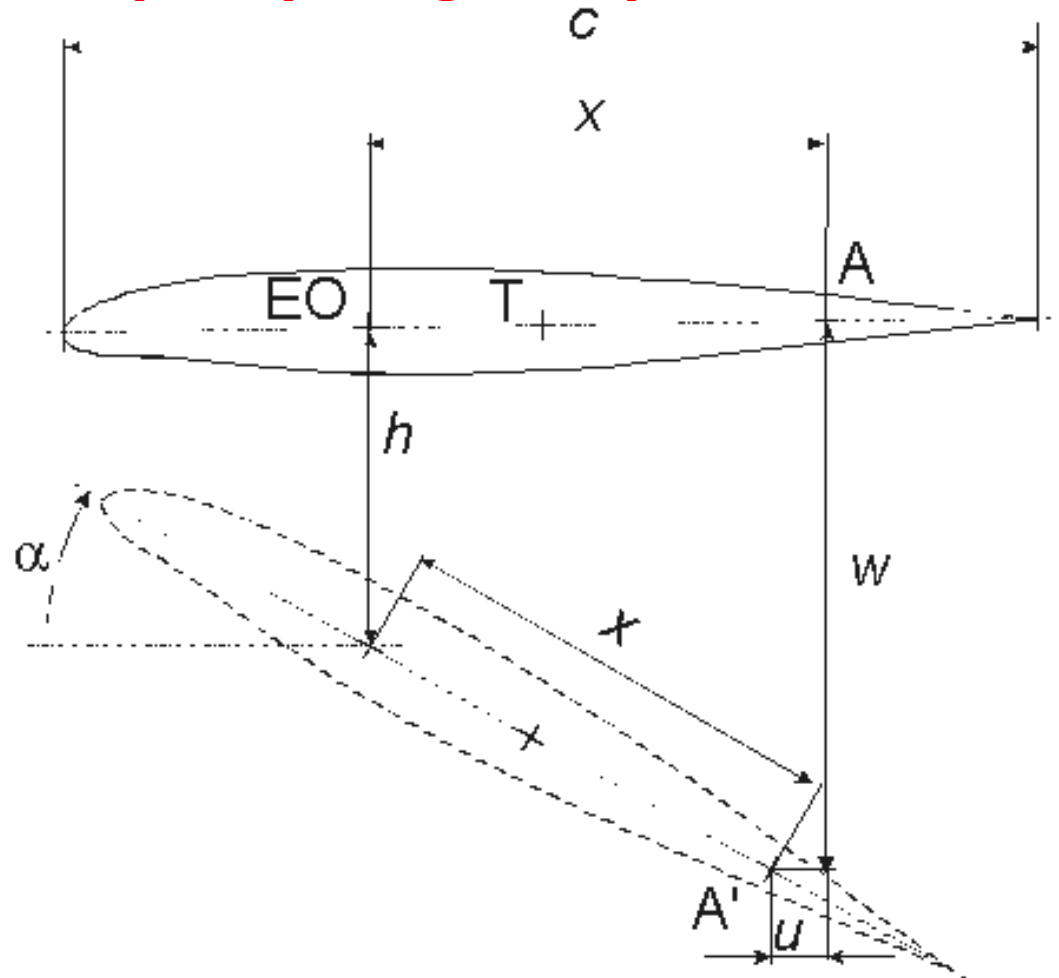
Nutno provést velmi komplikovanou precizní teoretickou matematickou analýzu

používáme výsledky, které získal prof. Gert Lube (Univ. Göttingen)

Další překážky při výpočtu řešení:

- **nelinearita diskrétního problému** - překonána pomocí Oseenových iterací,
- **řešení linearizovaných Oseenových problémů** ekvivalentních s velkými soustavami lineárních rovnic typu sedlového bodu - užití vhodných přímých nebo iteračních metod pro řešení lineárních algebraických systémů

Popis pohybu profilu



Profil se může **posunovat ve vertikálním směru** a **rotovat kolem elastické osy** $x_{EO} = (x_{EO1}, x_{EO2})$.

Vertikální a torzní pohyb je popsán **soustavou obyčejných diferenciálních rovnic**

$$\begin{aligned} m\ddot{H} + k_H H + S_\alpha \ddot{\alpha} \cos \alpha - S_\alpha \dot{\alpha}^2 \sin \alpha &= -F, \\ S_\alpha \ddot{H} \cos \alpha + I_\alpha \ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha - S_\alpha \dot{\alpha} \dot{H} \sin \alpha &= M, \end{aligned} \quad (23)$$

H – vertikální posunutí

α – úhel rotace kolem elastické osy

Zadané fyzikální parametry:

k_H – tuhost v posunutí

k_α – tuhost v torzi

S_α – statický moment vzhledem k elastické ose

I_α – moment setrvačnosti

m – hmotnost profilu

F – vertikální složka síly (= vztlak) působící na profil

M – torzní moment působící na profil

Síla F a torzní moment M jsou definovány jako veličiny závislé na řešení u a p soustavy rovnic popisujících proudění.

Závislost F a M na u a p definuje **interakci** proudící tekutiny s kmitajícím profilem.

Realizace kompletního sdruženého problému:

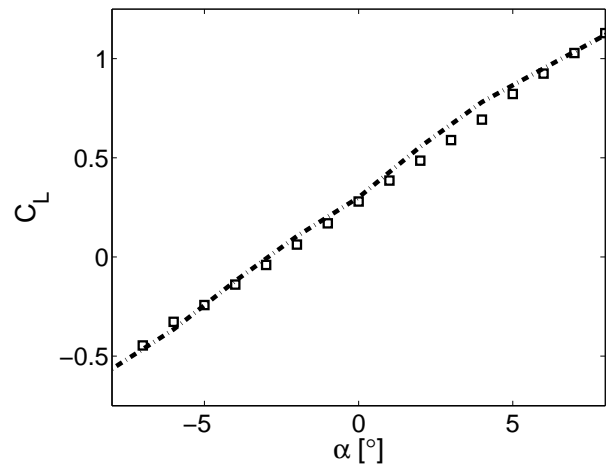
současné numerické řešení rovnic popisujících proudění a rovnic popisujících vibrace profilu

Numerická realizace

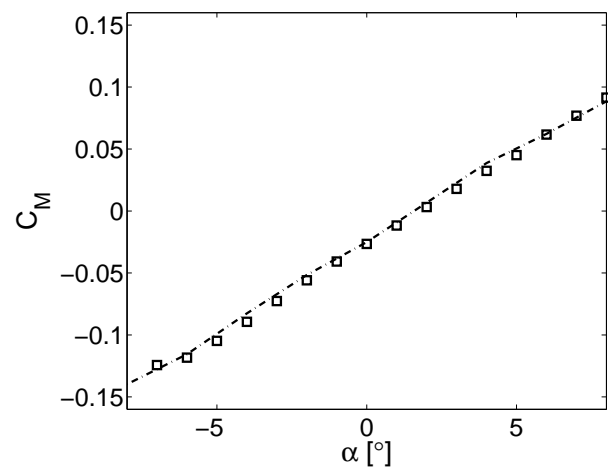
Validace metody: řešíme správné rovnice?

Verifikace metody: řešíme rovnice správně?

Srovnání závislosti vypočteného vztlaku a torzního momentu na úhlu náběhu s experimenty z NASA pro profil NACA 63₂ – 415



Srovnání měření a výpočtu vztlaku v závislosti na úhlu náběhu

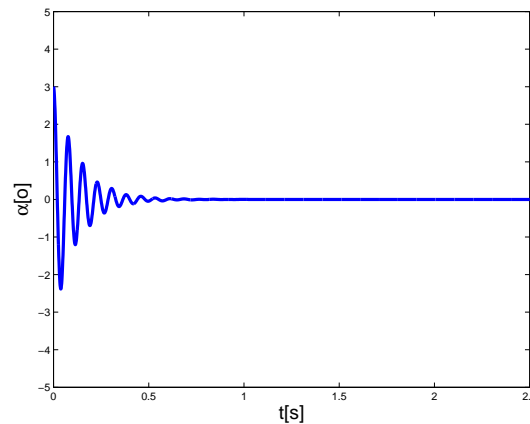
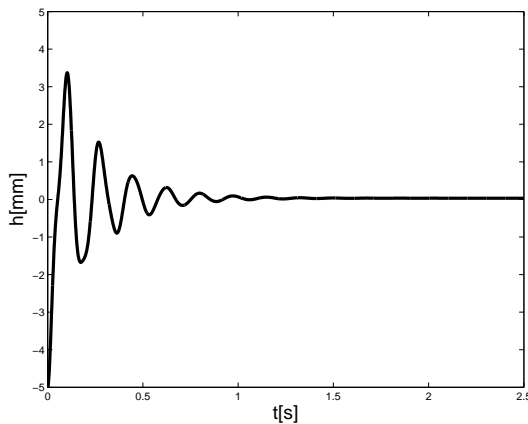


Srovnání měření a výpočtu torzního momentu v závislosti na úhlu náběhu

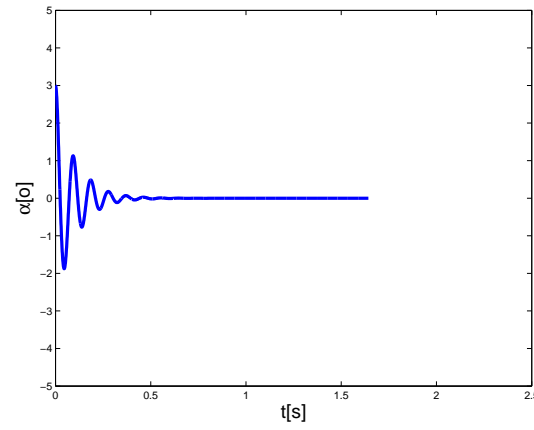
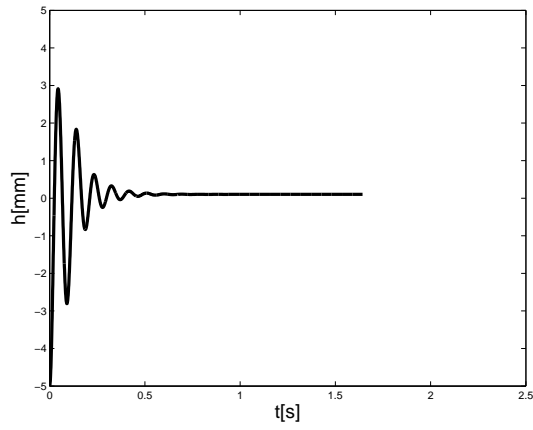
Praktická aplikace metody: simulace vibrací profilu **NACA 63₂-415** vynucených proudící tekutinou pro náběžnou rychlost v rozmezí $U = 15 - 40$ m/s.

Analýza VZLÚ \implies **stabilita** pro $U < 37.7$ m/s
Vypočtená mez stability $U = 37.3$ m/s

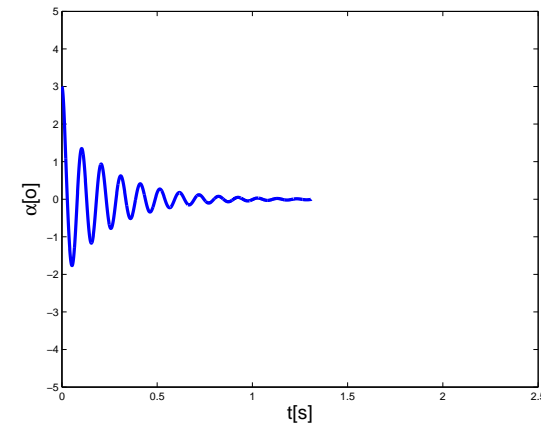
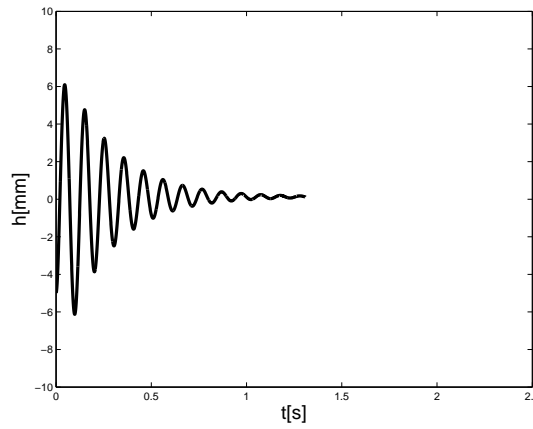
Pro náběžnou rychlost $U > 37.3$ m/s jsou **oscilace nestabilní**
- dostáváme typický **flutter** .



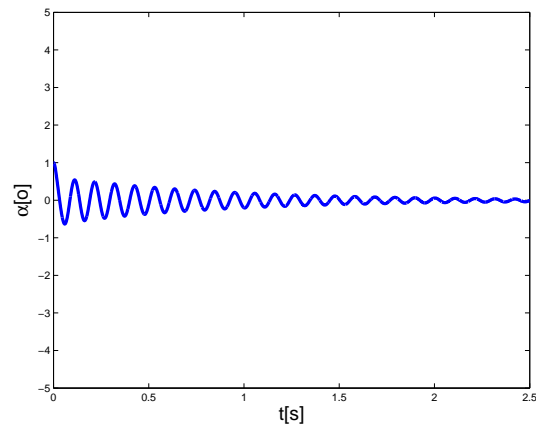
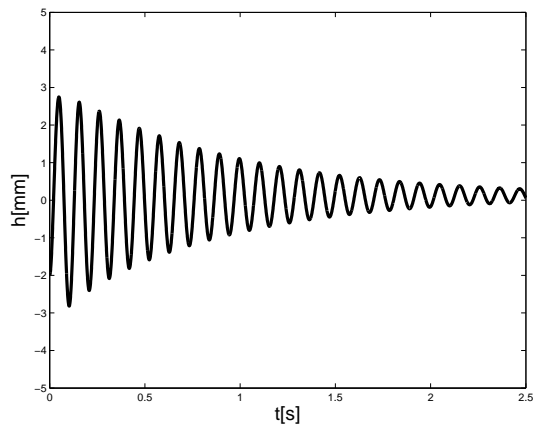
$U = 15$ m/s



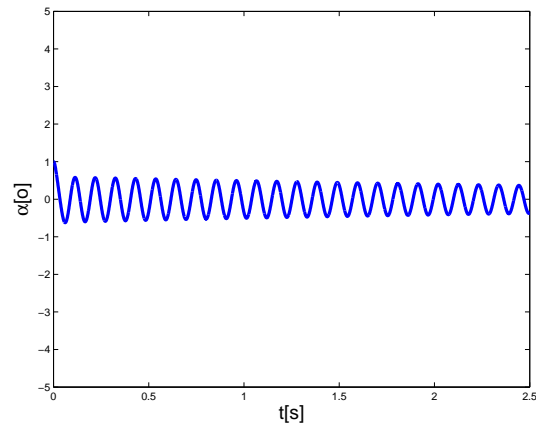
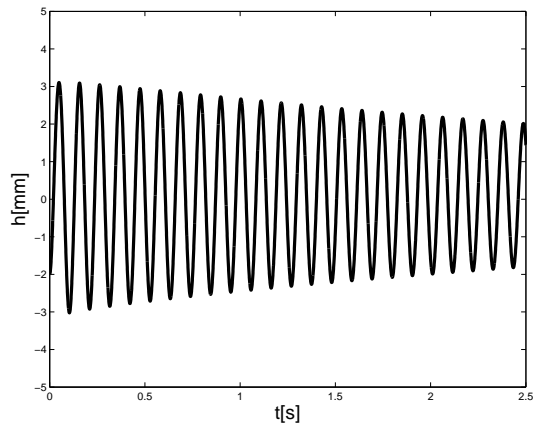
$$U = 27.5 \text{ m/s}$$



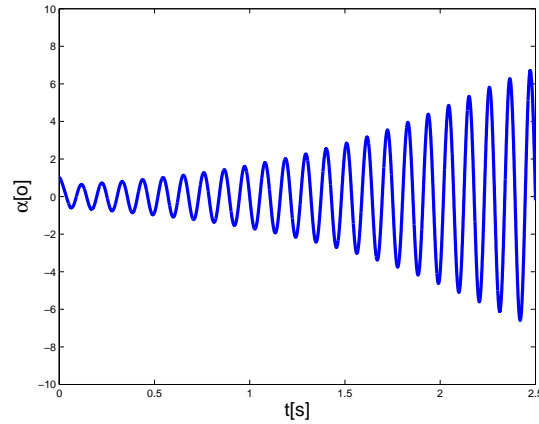
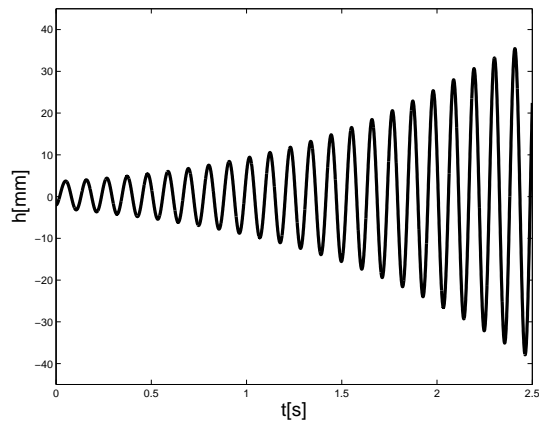
$$U = 32.5 \text{ m/s}$$



$U = 35 \text{ m/s}$



$U = 36 \text{ m/s}$



$$U = 37.5 \text{ m/s}$$

Video:

Vizualizace vibrací v závislosti na čase pro $U = 40 \text{ m/s}$

Jiné aplikace

Interakce proudícího vzduchu a "vlající vlajky"

skutečný cíl: vibrace papíru při jeho sušení v papírně (J. Hron, MFF UK)

Proudění vzduchu v lidských hlasivkách (P. Šidlof, ÚT AV ČR)

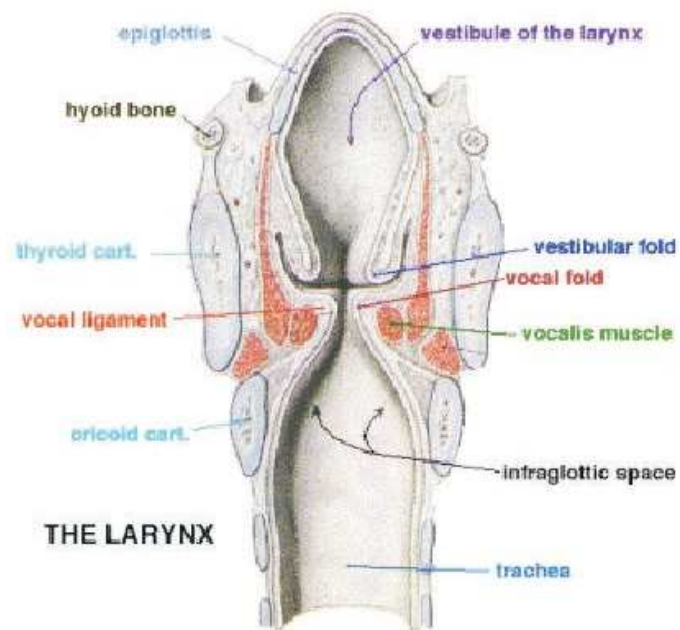
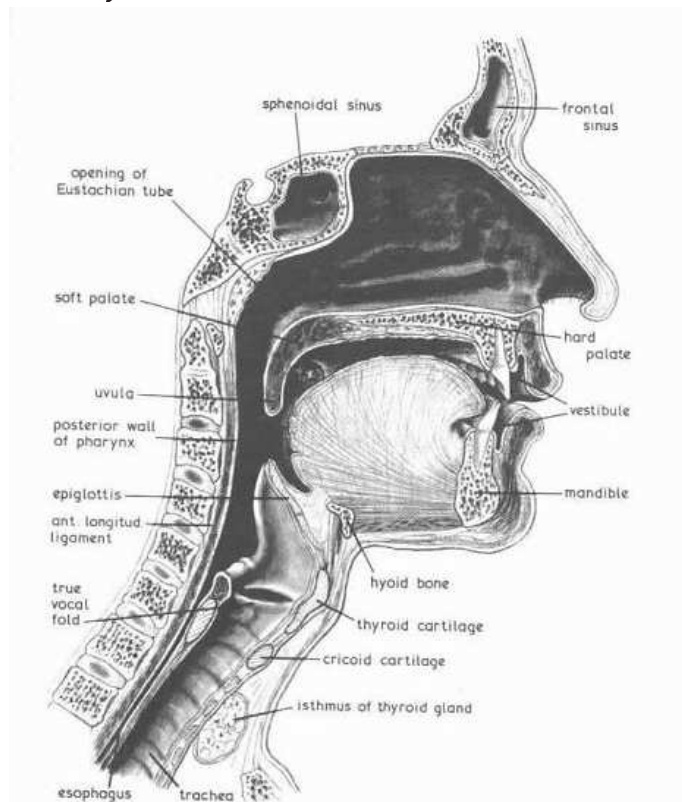
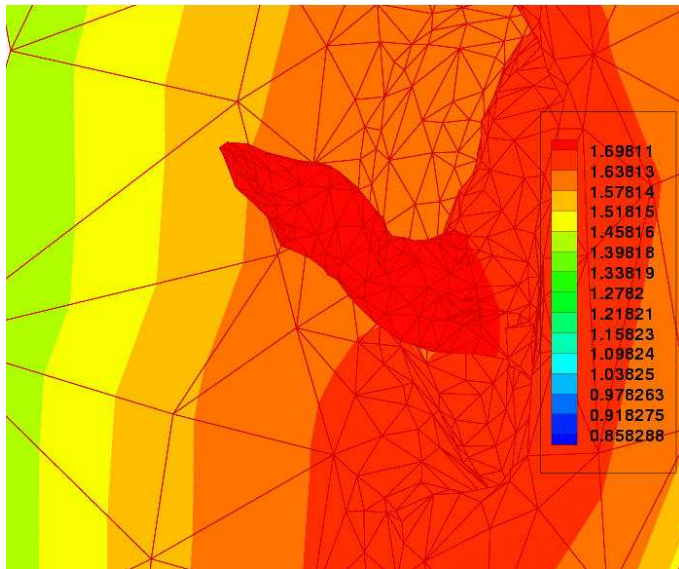


Schéma hlasového traktu v sagittálním řezu a detail...

Simulace tlakových vln v uchu (L. Demkowicz, Univ. of Texas at Austin)



Rozložení tlaku v uchu a jeho okolí

Závěr

Cílem přednášky bylo ukázat, že matematické metody hrají důležitou roli při řešení komplikovaných problémů, v našem případě při **studiu interakce proudících tekutiny a struktur**.

Matematické modely reálných procesů, matematická teorie, numerické metody a jejich analýza a algoritmizace, vypracování počítačových programů a realizace výpočtů na moderních počítačích umožňují

- snížení množství nákladných experimentů
- cílevědomé zaměření experimentů
- simulaci procesů, u nichž je experiment velmi obtížný nebo nemožný.

Literatura

Feistauer M.: **Mathematical Methods in Fluid Dynamics.** Longman, Harlow, 1993.

Feistauer M., Felcman J., Straškraba I.: **Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow.** Clarendon Press, Oxford, 2003.

Sváček P., Feistauer M., **Application of a stabilized FEM to problems of aeroelasticity.** In **Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH2003** (eds M. Feistauer, V. Dolejší, P. Knobloch, K. Najzar), Springer, Berlin, 2004.

Sváček P., Feistauer M., Horáček, J., **Numerical simulation of flow induced airfoil vibrations with large amplitudes.** **Journal of Fluids and Structures**, 23 (2007), 391-411.