Matematika tekutin v pohybu

Eduard Feireisl

Matematický ústav AVČR, Praha

185. zasedání US ČR, Praha, 16. září 2014

Základní myšlenka modelování

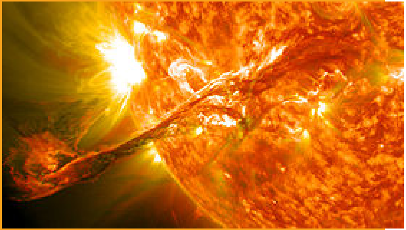
Johann von Neumann
[1903-1957]

In mathematics you don't understand things. You just get used to them.

Obrázky v textu jsou z wikipedie

Turbulence nebo vazkost?

med



slunce

Další názor...

Luc Tartar [Compensation effects in partial differential equations]

What puzzles me more is the behaviour of people who have failed to become good mathematicians and advocate using the language of engineers ... as if they were not aware of the efficiency of the engineering approach that one can control processes that one does not understand at all

Tekutiny mezi námi

- předpovědi počasí
- lodě, letadla, auta
- astrofyzika, hvězdy
- řeky, oceány, vlny tsunami
- lidské tělo, krev

A MATEMATIKA...

- Modelování
- Analýza, determinismus (?)
- Numerická analýza, výpočty

Existují “velké” problémy (?)

CLAY MATHEMATICS INSTITUTE, PROVIDENCE, RI

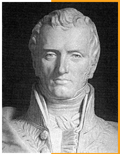
- Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
- Hodge Conjecture

- Navier-Stokes Equation

- P vs NP Problem
- Poincaré Conjecture
- Riemann Hypothesis
- Yang-Mills and Mass Gap

Navierův-Stokesův systém

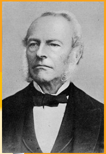
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,x)$ . . . . rychlost
- $\Pi = \Pi(t,x)$ . . . . tlak



Claude Louis Marie Henri Navier [1785-1836]

"Nestlačitelnost"

$$\mathrm{div}_x \mathbf{u} = 0$$



George Gabriel Stokes [1819-1903]

Rovnováha hybnosti

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathrm{div}_x(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x \Pi = \Delta \mathbf{u}$$

Matematické modely

Dynamika molekul

Tekutiny jako velké systémy částic (molekul, atomů)

Kinetické modely

Velké soubory popsané řečí teorie pravděpodobnosti

Spojité modely - mechanika kontinua

Fenomenologická teorie založená na pozorovatelných veličinách: Hustota, teplota, rychlost

Modely turbulence

V podstatě stejná teorie jako mechanika kontinua, ale popsaná v řeči "průměru"

Co je dobrý model?

Stephen William Hawking [*1942]

A model is a good model if it:

- Is elegant
- Contains few arbitrary or adjustable elements
- Agrees with and explains all existing observation
- Makes detailed predictions about future observations that disprove or falsify the model if they are not borne out

Co je lineární a co ne...

Linearní rovnice

- Řešení lze získat jako kombinaci elementárních řešení
- Řešitelnost pomocí symbolického počtu - Laplaceova nebo Fourierova transformace
- Omezená použitelnost

Nelineární rovnice

- Přesná řešení známa pouze vyjímečně: solitony, rázové vlny
- Singularity - blow up vs. rázová vlna
- Téměř všechny modely jsou nelineární

Jacques Hadamard, [1865 - 1963]

- **Existence.** Úloha má řešení
- **Jednoznačnost.** Úloha má jediné řešení pro daná data
- **Stabilita.** Řešení závisí spojitě na datech

Moderní přístup

Jacques-Louis Lions, [1928 - 2001]

- **Aproximace.** Úlohu lze nahradit aproximativním schematem, které lze řešit i numericky
- **A priorní odhady.** Aproximativní řešení jsou omezená
- **Konvergence.** Aproximativní řešení konvergují k zobecněnému řešení úlohy

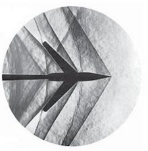
Singularity v nelineárních modelech

Blow-up

Řešení jsou velká (nekonečná) v konečném čase.
Systém dostává nerealistické množství energie

Rázové vlny, oscilace

Rázové vlny jsou singularity v "derivacích".
Hladká řešení se stávají nespojitými

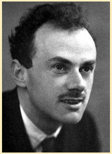


Slabá nebo silná řešení?

- *Bodové* (ideální) hodnoty funkcí nahrazeny *integrálními průměry*. Tato myšlenka je blízká principu *měření*
- Derivace nahrazeny integrály:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \varphi \mapsto -\int u \partial_x \varphi, \ \varphi \text{ hladká } \textit{testovací} \text{ funkce}$$

Dirakova distribuce: $\delta_0 : \ \varphi \mapsto \varphi(0)$



Paul Adrien Maurice Dirac
[1902-1984]

Klasická nebo slabá formulace?

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,x)$ .... rychlost
- $\varrho = \varrho(t,x)$ ....hustota

Zachování hmoty

$$\int_B \varrho(t_2,\cdot)\ \mathrm{d}x - \int_B \varrho(t_1,\cdot)\ \mathrm{d}x = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial B} \varrho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{dS}_x$$

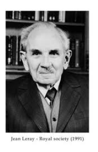
Rovnice kontinuity

$$\partial_t\varrho + \mathrm{div}_x(\varrho\mathbf{u}) = 0$$

Slabá formulace

$$\int\int \varrho\partial_t\varphi + \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \text{ pro } \textit{každou} \text{ hladkou } \varphi$$

State of the art



Jean Leray [1906-1998] Globální existence slabých řešení pro nestlačitelný Navierův-Stokesův systém (3D)

Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya [1922-2004] Globalní existence pro nestlačitelné 2D Navierovy - Stokesovy rovnice

Pierre-Louis Lions[*1956] Globální existence slabých řešení pro stlačitelné barotropické proudění (2,3D)

a mnoho dalších...

Co se může zkazit...

Co klasické modely nemohou "vidět"

- rychlost nemusí být omezená
- nekonečná rychlost šíření
- lokální charakter tlaku v "nestlačitelných" modelech

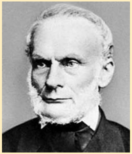
A matematika...

- "Mezera" mezi jednoznačností a existencí řešení
- Možnost blow-up
- Možnost rázových vln

A co s tím?

- Lepší modely?
- Lepší matematika?
- Obojí?

Mizí nám energie?



Rudolph Clausius, [1822–1888]

První a Druhý zákon

Die Energie der Welt ist constant; Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu

Kinetická energie

$$\textbf{klasicky:}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\ \mathrm{d}x = -\nu \int |\nabla_x \mathbf{u}|^2$$

$$\textbf{slabě:}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\ \mathrm{d}x \boxed{\leq} -\nu \int |\nabla_x \mathbf{u}|^2$$

Úplné systémy

Stavové veličiny

Hustota

$$\varrho = \varrho(t, x)$$

Teplota

$$\vartheta = \vartheta(t, x)$$

Rychlost

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$$

Termodynamické funkce

Tlak

$$p = p(\varrho, \vartheta)$$

Vnitřní energie

$$e = e(\varrho, \vartheta)$$

Entropie

$$s = s(\varrho, \vartheta)$$

Transport

Vazkost

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u})$$

Tepelný tok

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)$$

Rovnice...

Zachování energie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e(\varrho,\vartheta)\right)\ \mathrm{d}x=0$$

Zachování hmoty

$$\partial_t\varrho+\mathrm{div}_x(\varrho\mathbf{u})=0$$

Zachování hybnosti

$$\partial_t(\varrho\mathbf{u})+\mathrm{div}_x(\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\nabla_x p(\varrho,\vartheta)=\mathrm{div}_x\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})$$

Tvorba entropie

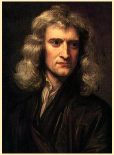
$$\partial_t(\varrho s)+\mathrm{div}_x(\varrho s\mathbf{u})+\mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\right)\boxed{\geq}\frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)$$

Druhý zákon

Joseph Fourier [1768-1830]

Fourierův zákon

$$\mathbf{q} = -\kappa(\vartheta)\nabla_x\vartheta$$

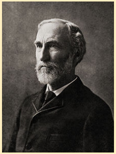


Isaac Newton [1643-1727]

Newtonův zákon

$$\mathbb{S} = \mu(\vartheta)\left(\nabla_x\mathbf{u} + \nabla_x^t\mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathrm{div}_x\mathbf{u}\right) + \eta(\vartheta)\mathrm{div}_x\mathbf{u}\mathbb{I}$$

Gibbsův vztah



Willard Gibbs
[1839-1903]

Gibbsův vztah:

$$\vartheta Ds(\varrho,\vartheta) = De(\varrho,\vartheta) + p(\varrho,\vartheta) D\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

Thermodynamická stabilita:

$$\frac{\partial p(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho} > 0, \quad \frac{\partial e(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta} > 0$$

Okrajové podmínky

Neprostupnost

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

Žádný zkluz

$$\mathbf{u}_{\mathrm{tan}}|_{\partial\Omega} = 0$$

Úplný zkluz

$$[\mathbb{S} \cdot \mathbf{n}] \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

Navierův zkluz

$$[\mathbb{S} \cdot \mathbf{n}]_{\mathrm{tan}} + \beta[\mathbf{u}]_{\mathrm{tan}} = 0$$

Tepelná izolace

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

Matematika úplných systémů

- Slabá řešení existují globálně v čase
- Silná řešení existují lokálně v čase
- **Slabé = silné.** Slabé a silné řešení souhlasí na společném intervalu existence
- **Stabilita.** Každé slabé řešení konverguje k rovnovážnému stavu

However...

Sir Winston Churchill, [1874–1965]

However beautiful the strategy, you should occasionally look at the results

Otevřené úlohy

- Jsou *slabá* řešení určena daty?
- Je hustota omezená zdola?
- Je rychlost omezená?

Turbulence?

Eulerovy rovnice ideální (nevazké) tekutiny

$$\mathrm{div}_x \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathrm{div}_x (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x \Pi = 0$$

Kinetická energie

$$e = \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$$

Špatné zprávy ...?

Camillo DeLellis [*1976]

Nekonečně mnoho řešení pro daná data

$$\lim_{t\to 0+} e(t) \boxed{>} e(0)$$

Řešení s předepsanou energií

$$e = \bar{e} - \text{ daná funkce}$$

László Székelyhidi [*1977]

Onsagerova hypotéza

Kritický modul spojitosti $\frac{1}{3}$