# MATEMATIKA

# Jaká matematika se ukrývá v pražském orloji?

*MICHAL KŘÍŽEK – LAWRENCE SOMER – ALENA ŠOLCOVÁ*

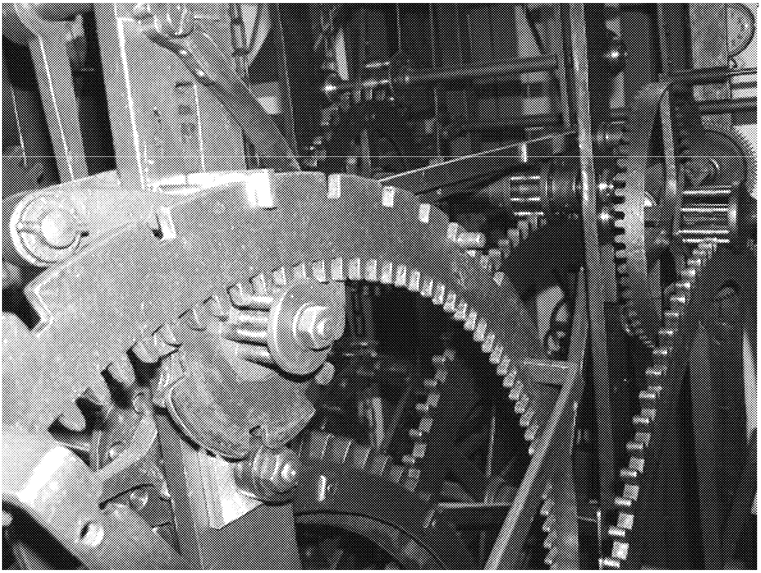
Matematický ústav AV ČR, Praha – Stavební fakulta ČVUT, Praha

## 1. Úvod

Pražský orloj vznikl v době mistra Jana Husa – kolem roku 1410. Jeho mechanicko-matematický model navrhl *Jan Ondřejův*, zvaný *Šindel*, který se zabýval matematikou a astronomií na pražské univerzitě (viz [3, s. 15]). Jeho starší kolega *Křišťan z Prachatic* již kolem roku 1406 zde přednášel o konstrukci astrolábu. Unikátní stroj orloje je umístěn uvnitř staroměstské radniční věže. Vytvořil jej *Mikuláš z Kadaně* (viz [1]). Původně se skládal ze dvou částí: jicího (tj. hlavního hodinového) stroje a bicího stroje. Později byl doplněn ještě o stroj apoštolský (zvonicí), který pohybuje figurami u ostění astronomického ciferníku a pohání průvod apoštolů. V průběhu staletí byla konstrukce orloje vícekrát zdokonalována, např. pověstným *Janem z Růže (mistrem Hanušem).*

Genialitu tehdejších hodinářů můžeme demonstrovat na konstrukci zařízení pro přesnou regulaci úderů zvonu. Bicí stroj obsahuje velké oběžné kolo o průměru 65 cm s 24 zářezy na vnějším obvodu, jejichž vzdálenosti postupně narůstají (viz obr. 1 a 2). To umožňuje periodické opakování 1–24 úderů zvonu během každého dne.*) Součástí bicího stroje je i pomocné kolečko o průměru 13 cm, jehož obvod je rozdělen 6 zářezy na segmenty o délkách oblouku 1, 2, 3, 4, 3, 2 (viz obr. 1 a 2). Tato čísla se periodicky opakují po každé otočce a jejich součet je $s = 15$. Na začátku

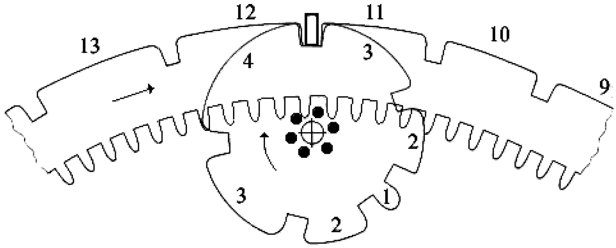
*) Počet úderů zvonu odpovídá SEČ, tj. v letním čase orloj odbíjí vždy o hodinu méně.



Obr. 1 Detail bicího stroje pražského orloje z počátku 15. století.

každé hodiny se zvedne západka, obě kola se začnou otáčet a zvon odbíjí příslušný počet hodin. Kola se zastaví, jakmile západka zapadne současně do zářezů na obou kolech. Každý den udeří zvon celkem $1 + 2 + \ldots + 24 = 300$krát, a protože toto číslo je dělitelné $s = 15$, bude pomocné kolečko na počátku každého dne vždy ve stejné poloze.

Velké kolo má 120 vnitřních zubů, které zapadají do cévového kola se 6 vodorovnými tyčkami, jež obklopují střed pomocného kolečka (obr. 1 a 2). Protože se velké kolo otočí jednou denně, pomocné kolečko se otočí za tu dobu 20krát. Obvodová rychlost pomocného kolečka je ale přibližně 4krát větší, protože jeho obvod je 5krát menší než obvod velkého kola. To umožňuje dostatečně přesnou regulaci počtu úderů zvonu zejména při opotřebení zářezů velkého kola. Bez pomocného kolečka by totiž mohl zvon udeřit např. jen 11krát místo 12krát, pokud by segment označený 12 na obr. 2 měl již příliš zaoblené konce. Pro jeden úder zvonu hodinu po půlnoci je dokonce pomocné kolečko nezbytné, neboť na velkém kole schází příslušný segment (obr. 1 a 4).




Obr. 2 Počet úderů zvonu je označen čísly $\ldots, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$ po vnějším obvodu velkého kola. Za ním je umístěno pomocné kolečko, jehož obvod je zářezy rozdělen na segmenty o délkách oblouku 1, 2, 3, 4, 3, 2. Západka je znázorněna malým obdélníčkem nahoře uprostřed.

Když se pomocné kolečko otáčí, vytváří pomocí délek segmentů mezi jednotlivými zářezy periodickou posloupnost, jejíž částečné součty odpovídají počtu úderů zvonu v každou celou hodinu,

$$
\begin{gathered}
1\ 2\ 3\ 4\ \underbrace{3\ 2}_{5}\ \ \underbrace{1\ 2\ 3}_{6}\ \ \underbrace{4\ 3}_{7} \\[2ex]
\underbrace{2\ 1\ 2\ 3}_{8}\ \ \underbrace{4\ 3\ 2}_{9}\ \ \underbrace{1\ 2\ 3\ 4}_{10}\ \ \underbrace{3\ 2\ 1\ 2\ 3}_{11}\ \ \underbrace{4\ 3\ 2\ 1\ 2}_{12} \\[2ex]
\underbrace{3\ 4\ 3\ 2\ 1}_{13}\ \ \underbrace{2\ 3\ 4\ 3\ 2}_{14}\ \ \underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2}_{15}\ \ldots
\end{gathered}
\tag{1}
$$

V další kapitole ukážeme, že takto bychom mohli pokračovat až do nekonečna. Všechny periodické posloupnosti ale tuto pozoruhodnou součtovou vlastnost nemají. Například je patrno, že nelze použít periodu 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, protože pro 6 úderů zvonu je $6 < 4 + 3$. Rovněž perioda 1, 2, 3, 2 se k tomuto účelu nehodí, neboť pro 4 údery máme $2 + 1 < 4 < 2 + 1 + 2$.

## 2. Trojúhelníková čísla a periodické posloupnosti

V této kapitole ukážeme, jak souvisí *trojúhelníková čísla*

$$T_k = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

s bicím strojem pražského orloje. Budeme se též zabývat periodickými posloupnostmi, které mají podobnou vlastnost jako posloupnost 1, 2, 3, 4, 3, 2, ... v (1), tj. které by mohly být použity při konstrukci pomocného kolečka. Množinu přirozených čísel označíme $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

**Definice 1**

Posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ se nazývá *periodická*, jestliže existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall\, i \in \mathbb{N} : \quad a_{i+p} = a_i. \tag{3}$$

Konečná posloupnost $a_1, \dots, a_p$ se nazývá *perioda* a $p$ *délka periody*. Nejmenší $p$ splňující (3) se nazývá *minimální délka periody* a jemu odpovídající posloupnost $a_1, \dots, a_p$ *minimální perioda*.

**Definice 2**

Nechť $(a_i) \subset \mathbb{N}$ je periodická posloupnost. Řekneme, že trojúhelníkové číslo $T_k$ pro $k \in \mathbb{N}$ je *dosažitelné* pomocí posloupnosti $(a_i)$, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$T_k = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{4}$$

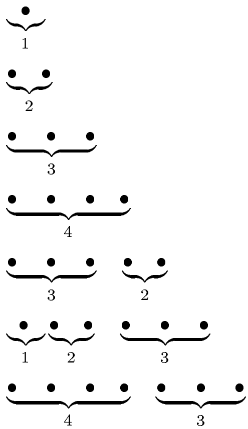
Posloupnost $(a_i)$ se nazývá *šindelovská*, jestliže $T_k$ je dosažitelné pomocí $(a_i)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : T_k = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{5}$$

Trojúhelníkové číslo $T_k$ na levé straně je rovno součtu $1 + \ldots + k$ hodin na velkém kole, zatímco součet na pravé straně odpovídá celkovému pootočení pomocného kolečka (obr. 3). Přitom pro $k$-tou hodinu platí

$$k = T_k - T_{k-1} = \sum_{i=m+1}^{n} a_i, \tag{6}$$

kde $T_{k-1} = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Protože $a_i > 0$, je číslo $n$ ve vztahu (5) závisející na $k$ určeno jednoznačně. Z (2) a (4) je také patrno, že $a_1 = 1$, je-li $(a_i)$ šindelovská posloupnost.



Obr. 3 Schematické znázornění trojúhelníkového čísla $T_7$. Černé tečky v $k$-tém řádku znázorňují počet úderů zvonu v $k$-té hodině, viz (6). Čísly jsou označeny délky segmentů mezi zářezy na pomocném kolečku.

Následující věta ukazuje, že podmínku (5) lze zaměnit mnohem jednodušší podmínkou, jež obsahuje pouze konečný počet čísel $k$. To nám umožňuje provést jen konečný počet aritmetických operací, abychom zjistili, zda zvolená perioda $a_1, \ldots, a_p$ dává šindelovskou posloupnost ve smyslu definice 2. Součet prvků periody budeme nadále označovat

$$s = \sum_{i=1}^{p} a_i. \tag{7}$$

**Věta 1**

Periodická posloupnost $(a_i)$ je pro liché $s$ ve vztahu (7) šindelovská, jestliže $T_k$ je dosažitelné pomocí $(a_i)$ pro $k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(s-1)$.

*Důkaz.* Případ $s = 1$ je triviální. Nechť tedy $s \geq 3$ je liché a nechť

$$\forall\, k \in \left\{1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}\,(s-1)\right\} \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, T_k = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{8}$$

Podle (7) platí

$$1 + 2 + \ldots + (s-1) = \frac{s-1}{2} \sum_{i=1}^{p} a_i, \tag{9}$$

kde $p$ je délka periody a $\frac{1}{2}(s-1)$ je celé číslo. Pro odpovídající posloupnost

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_p,}_{s} \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_p,}_{s} \ldots, \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_p,}_{s} \tag{10}$$

pak vztah (9) vyjadřuje, že se perioda $a_1, a_2, \ldots, a_p$ v posloupnosti (10) opakuje $\frac{1}{2}(s-1)$krát.

Musíme ověřit rovnost (4) pro všechna $k \geq \frac{1}{2}(s+1)$ za předpokladu (8). Pro $k = s-1$, které je sudé, pomocí (2), (9) a (3) dostáváme

$$T_k = T_{s-1} = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{\frac{pk}{2}} a_i,$$

neboli $n = \frac{1}{2}pk$ ve vztahu (4), a číslo $T_{s-1}$ je tedy dosažitelné.

Předpokládejme nyní, že $k = s - 1 - k'$, kde $1 \leq k' \leq \frac{1}{2}(s-3)$ a $s > 3$. Podle předpokladu (8) existuje $n' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\frac{k'(k'+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n'} a_i. \tag{11}$$

Ze vztahu (2) plyne, že

$$T_k = T_{s-1-k'} = \frac{(s-1-k')(s-k')}{2} = \frac{s(s-1-2k')}{2} + \frac{k'(k'+1)}{2}. \tag{12}$$

Protože $s$ je liché a $1 \leq k' \leq \frac{1}{2}(s-3)$, je $m = s - 1 - 2k'$ sudé přirozené číslo. Tedy podle (12), (7), (11) a (3) platí

$$T_k = \frac{s-1-2k'}{2} \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=1}^{n'} a_i = \sum_{i=1}^{\frac{pm}{2}+n'} a_i.$$

Dále nechť $k = qs + k'$ pro $q \in \mathbb{N}$ a $0 \leq k' < s$. Potom z (2) a (7) obdržíme

$$T_k = \frac{(qs+k')(qs+k'+1)}{2} = sj + \frac{k'(k'+1)}{2} = \sum_{i=1}^{pj} a_i + T_{k'},$$

kde $j = \frac{1}{2}q(qs+1) + qk'$ je celé číslo a $T_{k'} = 0$ pro $k' = 0$.

Z předchozí části důkazu již ale víme, že $T_{k'} = \sum_{i=1}^{n'} a_i$ pro nějaké $n' \in \mathbb{N}$ a $0 < k' < s$, což jsme chtěli dokázat.

*Poznámka.* Číslo $\frac{1}{2}(s-1)$ ve vztahu (8) nelze zredukovat, je-li $p$ délka minimální periody odpovídající $s$. Abychom se o tom přesvědčili, stačí uvažovat posloupnost $(a_i)$ s minimální periodou $1, 2, 2, 1, 4, 1, 4$ a součtem $s = 15$. Pak podle definice 2 jsou trojúhelníková čísla $T_1, \ldots, T_6$ dosažitelná pomocí $(a_i)$, ale $T_7$ není.

**Příklady**

Význam věty 1 můžeme demonstrovat na posloupnosti (1) pro $s = 15$. Stačí totiž ověřit vztah (5) pouze pro $k \leq \frac{1}{2}(s-1) = 7$, tedy jen první řádek ve vztahu (1). Dosažitelnost celých čísel $k > 7$ na dalších řádcích (1) pak vyplývá z věty 1.

Podobně můžeme ověřit předpoklady věty 1 i pro další periody:

1, 2 pro $p = 2$ a $s = 3$,
1, 2, 2 pro $p = 3$ a $s = 5$,
1, 2, 3, 1 pro $p = 4$ a $s = 7$,
1, 2, 3, 3 pro $p = 4$ a $s = 9$,
1, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4 pro $p = 11$ a $s = 25$.

Existují šindelovské posloupnosti i pro $s$ sudá. Jednu takovou můžeme zkonstruovat např. z periody 1, 2, 1, 1, 1:

$$1\ 2\ \underbrace{1\ 1\ 1}_{3}\quad \underbrace{1\ 2\ 1}_{4}\quad \underbrace{1\ 1\ 1\ 2}_{5}\quad \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 2}_{6}\ \ldots \tag{13}$$

Činitel $\frac{1}{2}(s-1)$ na pravé straně (9) ale není celočíselný. Proto příslušné prvky posloupnosti vyjadřující číslo $s = 6$ ve (13) nejsou ve stejném pořadí jako daná perioda.

**Věta 2**

Periodická posloupnost $(a_i)$ je pro sudá $s$ ve vztahu (7) šindelovská, jestliže $T_k$ je dosažitelné pomocí $(a_i)$ pro $k = 1, 2, \ldots, s-1$.

*Důkaz.* Nechť $s$ ve vztahu (7) je sudé a nechť

$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, s-1\} \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : T_k = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{14}$$

Ze vztahů (7) a (3) vyplývá, že

$$T_{2s-1} = (2s-1)\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{(2s-1)p} a_i.$$

Nechť $k = 2s-1-k'$, kde $1 \le k' \le s-1$. Podle předpokladu (14) existuje $n' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\frac{k'(k'+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n'} a_i.$$

Potom z (2) máme

$$T_k = T_{2s-1-k'} = \frac{(2s-1-k')(2s-k')}{2} = s(2s-1-2k') + \frac{k'(k'+1)}{2},$$

a tudíž

$$T_k = (2s-1-2k')\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=1}^{n'} a_i = \sum_{i=1}^{pm+n'} a_i,$$

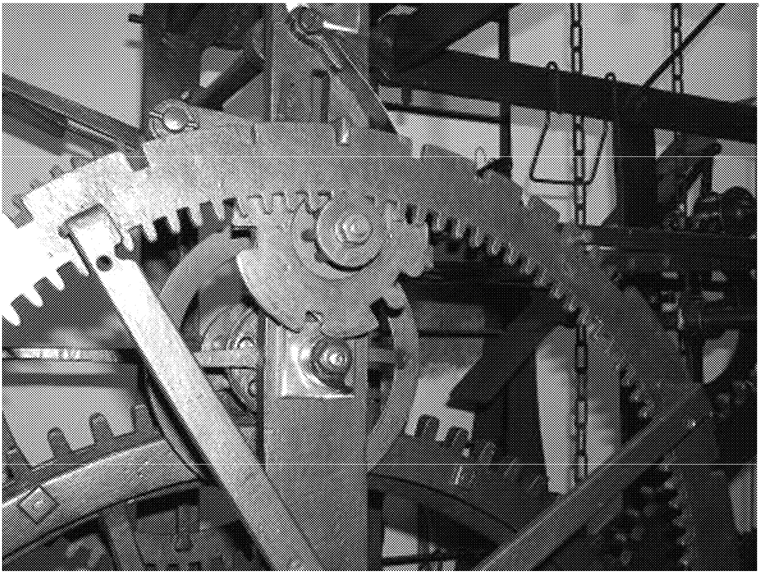
kde $m = 2s-1-2k'$.

Zbytek důkazu pro $k \ge 2s-1$ se podobá důkazu věty 1.

## 3. Závěrečné poznámky

Číslo $s-1$ v (14) opět nelze zredukovat, je-li $p$ délka minimální periody odpovídající $s$. Abychom toto ověřili, stačí uvažovat periodickou posloupnost $(a_i)$ s minimální periodou $1, 2, 1$ a $s = 4$. Pak jsou trojúhelníková čísla $T_1$ a $T_2$ dosažitelná pomocí $(a_i)$, avšak $T_3$ dosažitelné není.

V článku [2] jsou uvedeny nutné a postačující podmínky pro to, aby posloupnost $(a_i)$ byla šindelovská, a to ve smyslu definice 2. Je zde uveden též algoritmus, pomocí něhož nalezneme všechny šindelovské posloupnosti pro dané $s$. Např. pro $s = 2^m$, $m \ge 0$, jediná možná šindelovská posloupnost je $1, 1, 1, \dots$



Obr. 4 Umístění pomocného kolečka v bicím stroji. Západka je v poloze mezi segmenty odpovídajícími 8. a 9. hodině ranní.

Pražský orloj je patrně nejstarší a stále fungující hodinový stroj, který obsahuje takové důmyslné zařízení pro přesnou regulaci počtu úderů zvonu (viz obr. 4 a [1, s. 78]). Závěrem ještě poznamenejme, že Šindel se narodil v Hradci Králové. Proto dalekohled na tamní hvězdárně nese jeho jméno. Také planetka č. 3847 dostala jméno Šindel.

## Literatura


[1] *Horský, Z.:* Pražský orloj. Panorama, Praha 1988.

[2] *Křížek, M. – Šolcová, A. – Somer, L.:* Triangular numbers and the astronomical clock of Prague, preprint MÚ AV ČR, Praha, `http://mat.fsv.cvut.cz/solcova`.

[3] *Smolík, J.:* Mathematikové v Čechách od založení university Pražské. Publ. nákladem spisovatelovým, Antonín Renn, Praha 1864.